

TD n° 5 – Théorèmes du collier

Les *théorèmes du collier* sont deux théorèmes caractérisant des propriétés locales des surfaces de Riemann. L'idée générale est que toute géodésique fermée assez petite admet un grand voisinage tubulaire de la forme d'un cylindre topologique; un exemple naturel est celui d'une courbe fermée qui fait le tour d'une anse.

Exercice 1. Premier théorème

Le *premier théorème du collier* est le suivant : Soit S une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 2$, et soit $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ des géodésiques fermées simples disjointes sur S . Alors :

- (i) $m \leq 3g - 3$,
- (ii) Il existe des géodésiques simples fermées $\gamma_{m+1}, \dots, \gamma_{3g-3}$, telles que $S \setminus \{\gamma_1, \dots, \gamma_{3g-3}\}$ soit la réunion de pantalons topologiques.
- (iii) Les colliers $C(\gamma_i) = \{p \in S : \text{dist}(p, \gamma_i) \leq w(\gamma_i)\}$ de longueurs

$$w(\gamma_i) = \sinh^{-1}(1/\sinh(\frac{1}{2}\ell(\gamma_i)))$$

sont deux à deux disjoints.

- (iv) Chaque $C(\gamma_i)$ est isométrique au cylindre $[-w(\gamma_i), w(\gamma_i)] \times S^1$ muni de la métrique riemannienne $ds^2 = d\rho^2 + \ell(\gamma_i)^2 \cosh^2 \rho dt^2$.

Démontrer ce théorème, en admettant le résultat suivant : toute courbe fermée c d'homotopie non triviale sur une surface hyperbolique compacte satisfait les propriétés suivantes.

- la classe d'homotopie libre de c contient une unique géodésique γ .
- Soit γ est dans ∂S , soit $\gamma \cap \partial S = \emptyset$.
- Si c est simple alors γ est simple
- Si c est une composante de bord non lisse, alors γ et c bordent un anneau plongé.

Solution. Si on coupe S le long de $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, on obtient plusieurs surfaces hyperboliques S_i de signature (g_i, n_i) . Comme les γ_i sont deux à deux non homotopes et non contractiles, on a toujours soit $g_i \geq 1$ soit $n_i \geq 3$. Pour tout i tel que S_i n'a pas pour signature $(0, 3)$, S_i possède au moins une courbe fermée non contractile et non homotope à une de ses composantes de bord. D'après le TD 3, elle est homotope à une unique géodésique γ . En découpant S_i le long de γ , on obtient encore de nouvelles surfaces, et en itérant le procédé on exhibe une famille de géodésiques $\gamma_{m+1}, \dots, \gamma_{m'}$ telles que le découpage de S le long de $\gamma_1 \dots, \gamma_{m'}$ donne uniquement des surfaces de signature $(0, 3)$, c'est-à-dire des pantalons. Comme la caractéristique d'Euler de S est $2 - 2g$, où g est le genre de S , on en déduit qu'il y a $2g - 2$ pantalons dans la décomposition finale, donc $m' = 2g - 2$. Cela démontre les points (i) et (ii).

À présent que la surface est découpée en pantalons, on peut utiliser l'exercice 3 du TD 4 : on obtient alors (iii). Enfin, pour le point (iv), d'après l'exercice 3 du TD 4 les colliers sont homéomorphes à des cylindres de la forme $[-w(\gamma_i), w(\gamma_i)] \times S^1$; il reste à montrer l'isométrie pour la métrique indiquée. Pour cela, on projette le cylindre sur le demi-plan comme indiqué sur la figure 1. On considère la géodésique $\tau \mapsto \eta(\tau) = ie^\tau \in \mathbb{H}^2$ pour $\tau \in \mathbb{R}$. γ et γ' sont deux géodésiques perpendiculaires à η en a et b qui correspondent aux bords du cylindre (avec $|a| < |b|$). On paramétrise γ et γ' à vitesse unitaire et de sorte que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = b$. L'isométrie

$$m : z \in \mathbb{H}^2 \mapsto \frac{bz}{a}$$

laisse η invariant et satisfait $m(\gamma(\tau)) = \gamma'(\tau)$ pour $\tau \in \mathbb{R}$. Le recollement $\gamma(\tau) = \gamma'(\tau)$ pour $\tau \in \mathbb{R}$ donne bien un cylindre C , et on a une isométrie entre C et $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$, où

$$\Gamma = \{m^k, k \in \mathbb{Z}\}.$$

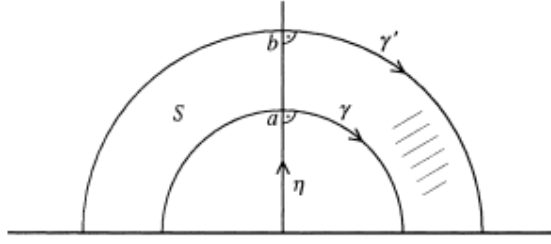


FIGURE 1 – Un cylindre hyperbolique dans le demi-plan est obtenu par recollement de la bande S le long de γ et γ'

La métrique voulue est obtenue par le passage des coordonnées du demi-plan aux *coordonnées de Fermi* (ρ, t) définies comme suit : pour tout $z \in \mathbb{H}^2$ on définit $\rho(z)$ comme la distance orientée de z à η , dans le sens où $\rho(z) < 0$ si z est à gauche de η et $\rho(z) > 0$ si z est à droite. On définit également t comme étant le temps tel que l'unique géodésique perpendiculaire à η passant par z coupe η en le point $\eta(t)$. En utilisant le flot géodésique on voit que

$$ds^2 = d\rho^2 + \cosh^2(\rho)dt^2,$$

comme voulu.

Exercice 2. *Rayon d'injectivité*

Pour toute surface de Riemann compacte S de genre $g \geq 2$, et pour tout $p \in S$, on pose

$$U_p(r) = \{q \in S : d(p, q) < r\}$$

la "boule" de centre p et de rayon r pour la distance hyperbolique. Le *rayon d'injectivité* de S en p est

$$r_p(S) = \sup\{r > 0 : U_p(r) \text{ est isométrique à un disque de rayon } r \text{ dans } \mathbb{H}^2\}.$$

1. Montrer que $r_p(S) = \frac{1}{2}\ell(\gamma_p)$, où γ_p est la plus petite géodésique fermée qui passe par p .
2. Montrer que le *rayon d'injectivité* de S , défini par

$$r_{\text{inj}}(S) = \inf_{p \in S} r_p(S),$$

vérifie $r_{\text{inj}}(S) = \frac{1}{2}\ell(\gamma)$, où γ est la plus petite géodésique fermée.

3. Montrer que les géodésiques considérées dans les questions 1 et 2 sont simples.

Solution.

1. Pour $r < r_p(S)$, $U_p(r)$ est isométrique à un disque de rayon r . Or, il n'existe pas de géodésiques fermées dans \mathbb{H}^2 donc $\ell(\gamma_p) \geq 2r_p(S)$. De plus, les relèvements de p sont espacés d'au moins $2r$ dans \mathbb{H}^2 . Soit p_1 et p_2 deux relèvements de p d'espacement exactement $2r$. Le segment géodésique entre p_1 et p_2 dans \mathbb{H}^2 se projette en un lacet géodésique de longueur $2r$ de base p . L'inégalité est donc une égalité.
2. La fonction $p \mapsto \ell(\gamma_p)$ est continue sur un compact, donc admet un minimum, disons en p_0 . Comme γ_{p_0} est d'homotopie non nulle, sa classe d'homotopie libre admet une unique géodésique γ , et c'est une géodésique fermée. On en déduit que

$$r_{\text{inj}}(S) = \frac{1}{2}\ell(\gamma_{p_0}) \geq \frac{1}{2}\ell(\gamma) \geq r_{\text{inj}}(S),$$

ce qui implique une égalité entre tous les membres.

3. On remarque que $U_p(r)$ est un disque pour tout $r < r_p(S)$, donc γ_p est donc un lacet simple. On utilise un argument identique pour la question 2.

Exercice 3. Deuxième théorème

Le deuxième théorème du collier est le suivant : soit S une surface de Riemann hyperbolique compacte de genre $g \geq 2$, et soit β_1, \dots, β_k la famille de toutes les géodésiques simples fermées de longueur inférieure ou égale à $2 \sinh^{-1}(1)$. Alors $k \leq 3g - 3$, et

- (i) les géodésiques β_1, \dots, β_k sont deux à deux disjointes
- (ii) $r_p(S) > \sinh^{-1}(1)$ pour tout $p \in S \setminus \{\bigcup_i C(\beta_i)\}$
- (iii) Si $p \in C(\beta_i)$ et $d = d(p, \partial C(\beta_i))$, alors

$$\sinh(r_p(S)) = \cosh\left(\frac{1}{2}\ell(\beta_i)\right) \cosh(d) - \sinh(d).$$

1. Démontrer que si γ_1, γ_2 sont deux géodésiques sur S qui se croisent transversalement, telles que γ_1 soit simple, alors

$$\sinh\left(\frac{1}{2}\ell(\gamma_1)\right) \sinh\left(\frac{1}{2}\ell(\gamma_2)\right) > 1.$$

Indication : regarder leur relèvement dans \mathbb{H}^2 .

2. Démontrer le théorème.

Solution.

1. Soit γ_1 et γ_2 deux géodésiques sur S qui se croisent transversalement. On suppose γ_1 simple. Soit $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_2$ des relèvements de ces géodésiques dans \mathbb{H}^2 . Alors l'ensemble

$$\tilde{C}(\tilde{\gamma}_1) = \{z \in \mathbb{H}^2 : d(z, \tilde{\gamma}_1) \leq w(\gamma_1)\}$$

est un relèvement de $C(\gamma_1)$, et $\tilde{\gamma}_2$ relie les deux composantes de bord de $\tilde{C}(\tilde{\gamma}_1)$. Donc γ_2 contient un arc dans $C(\gamma_1)$ qui relie les composantes de bord de $C(\gamma_1)$, et cet arc a une longueur supérieure ou égale à $2w(\gamma_1)$.

2. Par hypothèse, pour tout $i \neq j$,

$$\sinh\left(\frac{1}{2}\ell(\beta_i)\right) \sinh\left(\frac{1}{2}\ell(\beta_j)\right) \leq 1,$$

donc d'après la question précédente β_i et β_j sont disjointes. Ceci vaut pour tout $i \neq j$, donc on a montré le point (i). À présent, soit $p \in S$ tel que $r_p(S) \leq 1$. Montrons qu'il existe i tel que $p \in C(\beta_i)$. D'après l'exercice 2, la classe d'homotopie libre de γ_p admet une géodésique fermée simple β . Soit $\tilde{\gamma}_p$ et $\tilde{\beta}$ des relèvements de ces chemins dans \mathbb{H}^2 . Soit T la transformation d'axe $\tilde{\beta}$ qui correspond à γ_p . Soit \tilde{p} un relèvement de p dans \mathbb{H}^2 ; on considère son image $T(\tilde{p})$ (cf. figure 2). Comme T préserve l'orientation, \tilde{p} et $T(\tilde{p})$ sont du même côté de $\tilde{\beta}$.

On obtient un quadrilatère de longueurs $\lambda, \ell(\beta), \lambda, 2r_p(S)$, où $\lambda = d(\tilde{p}, \tilde{\beta}) = d(T(\tilde{p}), \tilde{\beta})$. Si l'on coupe ce quadrilatère en deux le long de la ligne pointillée (cf. figure 2), on obtient deux quadrilatères à trois angles droits. On utilise l'exercice 1 du TD 4 :

$$\sinh(r_p(S)) = \sinh\left(\frac{1}{2}\ell(\beta)\right) \cosh(\lambda) > \sinh\left(\frac{1}{2}\ell(\beta)\right) \sinh(\lambda). \quad (1)$$

Comme par hypothèse $\sinh(r_p(S)) \leq 1$, il vient que $\sinh\left(\frac{1}{2}\ell(\beta)\right) < 1$, et β est bien l'une des géodésiques β_i , ce qui prouve (ii). Enfin, si $p \in C(\beta_i)$, on a $\lambda = w(\beta_i) - d$, et d'après

